センター試験数学対策講座

H23 数ⅠA-2
学習日　　／

a，b，c を定数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。さらに，G が点$(1,\ 2b-1)$を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

以下，②，③ のとき，2 次関数 ① とそのグラフ G を考える。

(1)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \qquad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(2)　$b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。一方，$x \geqq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

＜考え方・ヒント＞

$y = ax^2 + bx + c$　を

　$y = a(x-p)^2 + q$

の形に変形する。

　→　頂点$(p,\ q)$　軸 $x = p$

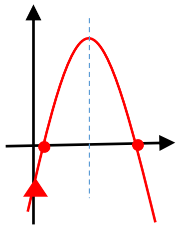
(1)　$a < 0$ なので上に凸

　→　頂点の y 座標 $q > 0$

　　ならば x 軸と 2 点で交わる。

　＊判別式 $D > 0$ でもよい。

　さらに，軸>0，$x = 0$ の y 座標（y 切片▲）< 0　であれば、G は x 軸の正の部分で 2 つの交点を持つ。



(2)　上に凸なので

　軸 $< \dfrac{b}{2} \to x = b$ で最小

　軸 $> \dfrac{b}{2} \to x = 0$ で最小

　軸<0　　→ $x=0$ で最大

　$0 \leqq$ 軸 $\leqq b$ → 頂点が最大

　$b<$ 軸　　→ $x=b$ で最大

平行移動は頂点の位置を比べる。

【解答欄】

<table>
<tr><td>記号</td><td>アイ</td><td>ウ</td><td>エ</td><td>オ</td><td>カキ</td><td>ク</td><td>ケ</td><td>コ</td><td>サ</td><td>シ</td><td>ス</td><td>ソ</td></tr>
<tr><td>解答</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>配点</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>記号</td><td>ソ</td><td>タ</td><td>シ</td><td>ツ</td><td>テ</td><td>ト</td></tr>
<tr><td>解答</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>配点</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

＜略解＞

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

軸は　$x = -\dfrac{b}{2a}$

同様にして　$y = -3x^2 + 12bx = -3(x - 2b)^2 + 12b^2$　より　軸は $x = 2b$

従って，　$-\frac{b}{2a} = 2b$　より　$a = -\frac{1}{4}$

①に（1，2ｂ－1）を代入して

$2b - 1 = a + b + c$　より　$c = b - a - 1 = b - \frac{3}{4}$

(1)　Gは a<0 で上に凸だから，頂点の y 座標>0　のとき x 軸と 2 点で交わる。

$-\frac{b^2-4ac}{4a} > 0$　に　$a = -\frac{1}{4}$，$c = b - \frac{3}{4}$　を代入して　$b^2 + b - \frac{3}{4} > 0$

$(2b - 1)(2b + 3) > 0$　だから　$b < -\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2} < b$　…①

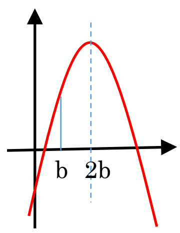
さらに，　軸>0　かつ　y 切片<0　のときに G は x 軸の正の部分で 2 つの交点を持つ。

軸 $x = -\frac{b}{2a} = 2b$　だから　ｂ>0　…②

$x = 0$ のとき　$y = c = b - \frac{3}{4}$　だから　$b < \frac{3}{4}$　…③

①，②，③　から　$\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$

(2)　軸 x=2b　だから　0≦x≦b における最小値は x=0 のときで　$y = c = b - \frac{3}{4}$



従って，　$b - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$　よって，$b = \frac{1}{2}$

x≧b における最大値は頂点になるので，　$b^2 + b - \frac{3}{4} = 3$

これより，　$b = \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$　　$b > 0$ だから $b = \frac{3}{2}$

G_1 の頂点は　$b=\frac{1}{2}$　を代入して　$(1,0)$

G_2 の頂点は　$b=\frac{3}{2}$　を代入して　$(3,3)$

よって，G_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 平行移動すると G_2 に重なる。

＜解答＞

記号	アイ	ウ	エ	オ	カキ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	ソ
解答	**－1**	**4**	**3**	**4**	**－3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**4**
配点	3		2		2		2		3		3	

記号	ソ	タ	シ	ツ	テ	ト
解答	**1**	**2**	**3**	**2**	**2**	**3**
配点	4		4		2	